BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP

BÁO CÁO TỔNG KẾT
ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CỦA SINH VIÊN

ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHO ĐIỀU KIỆN CO TUẦN HOÀN KIỂU CHATTERJEA YẾU TRONG KHÔNG GIAN KIỂU-MÊTRIC

Mã số: CS2013.02.27

Chủ nhiệm đề tài: NGUYỄN QUỐC DŨNG

Đồng Tháp, 4/2014

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP

BÁO CÁO TỔNG KẾT
ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CỦA SINH VIÊN

ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHO ĐIỀU KIỆN CO TUẦN HOÀN KIỂU CHATTERJEA YẾU TRONG KHÔNG GIAN KIỂU-MÊTRIC

Mã số: CS2013.02.27

Xác nhận của Chủ tịch HĐ nghiệm thu **Chủ nhiệm đề tài**

Nguyễn Quốc Dũng

Đồng Tháp, 4/2014

MỤC LỤC

BỘ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO | CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP | Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

TÓM TẮT KẾT QUẢ ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CỦA SINH VIÊN

Tên đề tài: Định lí điểm bất động cho điều kiện co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu trong không gian kiểu-mêtric.

Mã số: CS2013.02.27

Chủ nhiệm đề tài: Nguyễn Quốc Dũng

Tel.: 0908545110 E-mail: nguyendung10011990@gmail.com

Cơ quan chủ trì đề tài: Trường Đại học Đồng Tháp

Cơ quan và cá nhân phối hợp thực hiện: Không

Thời gian thực hiện: 5/2013 đến 4/2014

1. Mục tiêu: Thiết lập và chứng minh định lí điểm bất động cho điều kiện co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu trong không gian S-mêtric.

2. Nội dung chính:

- Kiến thức chuẩn bị.

- Định lí điểm bất động cho điều kiện co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu trong không gian S-mêtric. Đồng thời, xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

3. Kết quả chính đạt được (khoa học, ứng dụng, đào tạo, kinh tế - xã hội, ...):

- Đề tài giới thiệu định nghĩa *co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu* trong không gian S-mêtric.

- Thiết lập và chứng minh định lí điểm bất động cho điều kiện co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu trong không gian S-mêtric, xây dựng ví dụ minh họa và bốn hệ quả quan trọng cũng được rút ra.

- Các kết quả trên đã được công bố trong Kỷ yếu Hội nghị sinh viên nghiên cứu khoa học năm 2013, Trường Đại học Đồng Tháp và một bản thảo bài báo khoa học.

Chủ nhiệm đề tài

Nguyễn Quốc Dũng

MINISTRY OF EDUCATION & TRAINING

DONG THAP UNIVERSITY

SOCIALIST REPUBLIC OF VIET NAM

Independence - Freedom - Happiness

SUMMARY

Project Title: A fixed point theorem for weakly chatterjea-type cyclic contractions in type-metric spaces.

Code number: CS2013.01.12

Coordinator: Nguyễn Quốc Dũng

Tel.: 0908545110 E-mail: nguyendung10011990@gmail.com

Implementing Institution: Dong Thap University

Cooperating Institution(s): No

Duration: From 2013, June to 2014, May

1. Objectives: To state and prove a fixed point theorem for weakly Chatterjea-type cyclic contractions in S-metric spaces.

2. Main contents:

- Preliminaries.

- Fixed point theorem for weakly Chatterjea-type cyclic contractions in S-metric spaces. Also, we give an example to illustrate the obtained results.

3. Results obtained:

- Introduction definitions thread *weakly Chatterjea-type cyclic contractions* in S-metric spaces.

- Establish and prove fixed point theorem for weakly Chatterjea-type cyclic contractions in S-metric spaces, we give an example to illustrate the obtained results and four important consequences are drawn.

- The results were publisled in the proceeding of the science research conference of Dong Thap University's student and a manuscript sciencetific article.

Project manager

Nguyễn Quốc Dũng

MỞ ĐẦU

1 Tổng quan tình hình nghiên cứu

Nguyên lí ánh xạ co Banach được xem là một trong những định lí cơ bản nhất trong lí thuyết điểm bất động. Giả thiết của Nguyên lí ánh xạ co Banach khá mạnh, nó bao gồm cả tính liên tục của ánh xạ. Do đó, một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là: Tìm một điều kiện co để tồn tại điểm bất động cho ánh xạ mà không cần điều kiện liên tục của nó? Câu trả lời được khẳng định bởi các tác giả Chatterjea [5], Kannan [10], [11], Y. Alber và S. G. Delabriere [1]... Việc mở rộng Nguyên lí ánh xạ co Banach cho lớp ánh xạ trên các không gian khác nhau cũng được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu [21].

Năm 2010 Khamsi [12] giới thiệu lớp không gian mêtric suy rộng là kiểu-mêtric. Sau đó vấn đề định lí điểm bất động trên lớp không gian này được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu.

Trong [13], Kirl và các cộng sự đã giới thiệu khái niệm biểu diễn tuần hoàn và đã đặc trưng Nguyên lí ánh xạ co Banach cho ánh xạ tuần hoàn. Năm 2013, Chandok và Postolache đã chứng minh định lí điểm bất động cho điều kiện co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu trên không gian mêtric và đạt được một số kết quả trong [4].

Gần đây, Sedghi, Shobe và Aliouche đã đưa ra khái niệm và một số tính chất của không gian S-mêtric trong [20]. Đồng thời các tác giả cũng đã phát biểu và chứng minh một số định lí điểm bất động trên không gian S-mêtric.

Sau đó S. Sedghi [19] và các cộng sự đã chứng minh được không gian S-mêtric là không gian kiểu-mêtric đặc biệt với $K = \frac{3}{2}$.

Ở trong nước, hướng nghiên cứu này đang được tiến hành bởi số tác giả ở Trường Đại học Vinh, Trường Đại học Hồng Đức, Viện Toán học và thu được một số kết quả [15]. Hiện tại, nhóm nghiên cứu tại Trường Đại học Đồng Tháp đang thảo luận một số vấn đề về không gian mêtric và những suy rộng của nó, bước đầu đã thu được một số kết quả [7], [8], [9].

Trong đề tài này chúng tôi chứng minh định lí điểm bất động cho điều kiện co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu trên không gian S-mêtric hay không gian kiểu-mêtric với $K = \frac{3}{2}$, đồng thời đưa ra ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

2 Tính cấp thiết của đề tài

Trên cơ sở nghiên cứu một số tài liệu liên quan đến định lí điểm bất động cho điều kiện co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu trên không gian S-mêtric, chúng tôi nhận thấy rằng định lí điểm bất động cho điều kiện co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu trên không gian mêtric trong [4] chưa được nghiên cứu trên không gian S-mêtric. Vì vậy, trong đề tài này chúng tôi đặt vấn đề khảo sát định lí điểm bất động trong bài báo [4] trên không gian S-mêtric.

Kết quả đề tài góp phần làm phong phú định lí điểm bất động trên không gian S-mêtric. Nó còn là một tài liệu tham khảo cho sinh viên Khoa SP Toán - Tin Trường Đại học Đồng Tháp trong học tập và nghiên cứu các môn học chuyên ngành Giải tích.

3 Mục tiêu nghiên cứu

-Thiết lập và chứng minh định lí điểm bất động cho điều kiện co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu trong không gian S-mêtric.

- Xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

4 Cách tiếp cận và phương pháp nghiên cứu

Cách tiếp cận: Nghiên cứu tài liệu, bằng cách tương tự hóa những kết quả đã có đề xuất kết quả mới.

Mô tả phương pháp: Sinh viên nghiên cứu tài liệu, nắm vững những kết quả đã có, sau đó trình bày trước nhóm thảo luận. Cùng với sự hướng dẫn của giảng viên, sinh viên đề xuất sự tương tự hoá và chứng minh.

5 Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

- Đề tài nghiên cứu định lí điểm bất động cho điều kiện co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu trong không gian S-mêtric.

- Đề tài thuộc lĩnh vực lí thuyết điểm bất động trong không gian S-mêtric.

6 Nội dung nghiên cứu

Đề tài nghiên cứu định lí điểm bất động cho điều kiện co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu trong không gian S-mêtric. Nội dung chính của đề tài được trình bày trong 2 chương.

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị.

Chương 2: Định lí điểm bất động cho điều kiện co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu trong không gian S-mêtric.

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong mục này chúng tôi trình bày một số khái niệm và định lí cần sử dụng trong chương sau.

1.1 Khái quát về không gian S-mêtric

1.1.1 Định nghĩa ([20], Defintion 2.1)**.** Cho X là tập hợp khác rỗng. Ánh xạ $S : X^3 \longrightarrow [0, \infty)$ được gọi là *S-mêtric* trên X nếu các điều kiện sau được thỏa mãn với mọi $x, y, z, a \in X$

(i) $S(x, y, z) = 0$ khi và chỉ khi $x = y = z$;

(ii) $S(x, y, z) \leq S(x, x, a) + S(y, y, a) + S(z, z, a)$.

Khi đó (X, S) được gọi là *không gian S-mêtric*.

1.1.2 Ví dụ. Cho tập $X = \mathbb{R}$. Khi đó công thức $S(x, y, z) = |x - z| + |y - z|$ với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ là một S-mêtric trên $\mathbb{R}$.

Thật vậy

Với mọi $x, y, z, a \in \mathbb{R}$ ta có

(i) $|x - z| + |y - z| \geq 0 \Leftrightarrow S(x, y, s) \geq 0$.

(ii) Ta có $|x - z| + |y - z| = 0$ khi và chỉ khi $|x - z| = 0$ và $|y - z| = 0$ hay

$x = y = z$.

Suy ra $S(x, y, z) = 0$ khi và chỉ khi $x = y = z$.

(iii) Ta có
$$\begin{aligned} |x - z| + |y - z| &= |x - a + a - z| + |y - a + a - z| \\ &\leq |x - a| + |z - a| + |y - a| + |z - a| \\ &= |x - a| + |y - a| + 2|z - a| \\ &\leq 2|x - a| + 2|y - a| + 2|z - a| \\ &= S(x, x, a) + S(y, y, a) + S(z, z, a). \end{aligned}$$

Các điều kiện của Định nghĩa 1.1.1 được thỏa mãn nên $S(x, y, z)$ là một S-mêtric.

1.1.3 Mệnh đề ([20], Lemma 2.5)**.** *Cho (X, S) là không gian S-mêtric. Khi đó $S(x, x, y) = S(y, y, x)$ với mọi $x, y \in X$.*

1.1.4 Hệ quả ([8], Lemma 1.7)**.** *Cho (X, S) là một không gian S-mêtric. Khi đó với mọi $x, y, a \in X$, ta có*
$$S(x, x, y) \leq 2S(y, y, a) + S(a, a, x)$$
và
$$S(x, x, y) \leq 2S(x, x, a) + S(a, a, y).$$

1.2 Sự hội tụ trong không gian S-mêtric

1.2.1 Định nghĩa ([20], Defintion 2.8)**.** Cho (X, S) là một không gian S-mêtric.

(i) Dãy $\{x_n\}$ trong X được gọi là *hội tụ về x* nếu $\lim S(x_n, x_n, x) = 0$, tức là với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $S(x_n, x_n, x) < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_0$, kí hiệu $\lim x_n = x$.

(ii) Dãy $\{x_n\} \subset X$ được gọi là *dãy Cauchy* nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ $S(x_n, x_n, x_m) < \varepsilon$ với mọi $n, m \geq n_0$.

(iii) Không gian S-mêtric (X, S) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy trong

(X, S) là một dãy hội tụ.

1.2.2 Định nghĩa ([20], Defintion 2.6)**.** Cho (X, S) là không gian S-mêtric và $A \subset X$. Với $r > 0$ và $x \in X$, ta định nghĩa *quả cầu mở* $B_S(x, r)$ và *quả cầu đóng* $B_S[x, r]$, tâm x bán kính r như sau

$$B_S(x, r) = \{y \in X : S(y, y, x) < r\},$$
$$B_S[x, r] = \{y \in X : S(y, y, x) \leq r\}.$$

Tôpô sinh bởi S-mêtric là tôpô được xác định bởi họ các quả cầu mở trên X.

1.2.3 Mệnh đề ([20], Lemma 2.10)**.** *Giới hạn (nếu có) của một dãy trong không gian S-mêtric là duy nhất.*

1.2.4 Mệnh đề ([20], Lemma 2.12)**.** *Cho (X, S) là không gian S-mêtric. Nếu dãy $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ lần lượt hội tụ về x, y thì $\lim S(x_n, x_n, y_n) = S(x, x, y)$.*

1.2.5 Mệnh đề. *Nếu A là tập con đóng trong không gian S-mêtric đầy thì A là không gian đầy.*

Chứng minh. Giả sử $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong Y. Khi đó $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong X, vì X đầy nên tồn tại $x \in X$ sao cho $\{x_n\}$ hội tụ về x. Do Y đóng nên $x \in Y$. Vậy Y đầy. □

Tiếp theo ta phát biểu lại khái niệm hàm nửa liên tục dưới.

1.2.6 Định nghĩa ([14])**.** Cho X, Y là hai tập con của tập số thực và hàm $\psi : X \times X \longrightarrow Y$ được gọi là *nửa liên tục dưới* trên $X \times X$ nếu với mỗi dãy $\{(x_n, y_n)\} \subset X \times X$ và $\{(x_n, y_n)\}$ hội tụ đến $(x, y) \in X \times X$ thì $\underline{\lim}\, \psi(x_n, y_n) \geq \psi(x, y)$.

CHƯƠNG 2

ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHO ĐIỀU KIỆN CO TUẦN HOÀN KIỂU CHATTERJEA YẾU TRONG KHÔNG GIAN S-MÊTRIC

2.1 Định lí điểm bất động cho điều kiện co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu trong không gian S-mêtric

Trước hết ta nêu một số khái niệm liên quan đến tính tuần hoàn của tập X.

2.1.1 Định nghĩa ([4], Defintion 1.1)**.** Cho $X \neq \varnothing$ và ánh xạ $T : X \longrightarrow X$. Khi đó $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i$ được gọi là *sự biểu diễn tuần hoàn của* X *đối với* T nếu các điều kiện sau được thỏa mãn

(i) $X_i, i = 1, ..., m$ là những tập hợp khác rỗng;

(ii) $T(X_1) \subset X_2, ..., T(X_{m-1}) \subset X_m, T(X_m) \subset X_1$.

2.1.2 Định nghĩa ([4])**.** Kí hiệu Φ là tập hợp các hàm số liên tục, không giảm $\mu : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$, với $\mu(t) = 0$ nếu và chỉ nếu $t = 0$. Kí hiệu Ψ là tập hợp các hàm nửa liên tục dưới $\psi : [0, +\infty)^2 \longrightarrow [0, +\infty)$, với $\psi(t_1, t_2) > 0$, với mọi $t_1, t_2 \in (0, +\infty)$và $\psi(0, 0) = 0$.

2.1.3 Định nghĩa. Cho (X, S) là không gian S-mêtric, $A_1, A_2, ..., A_m$, $m \in \mathbb{N}$ là dãy các tập con khác rỗng của X và $Y = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$. Khi đó ánh xạ $T : Y \longrightarrow Y$ được gọi là *co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu* nếu các điều kiện sau được thỏa mãn

(*i*) $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ là sự biểu diễn tuần hoàn của Y đối với T;

(*ii*)
$$\mu(S(Tx, Tx, Ty)) \leq \mu(\frac{1}{3}[S(x, x, Ty) + S(y, y, Tx)]) - \psi(S(x, x, Ty), S(y, y, Tx))$$

với $x \in A_i, y \in A_{i+1}, i = 1, 2, ..., m$, trong đó $A_{m+1} = A_1, \mu \in \Phi$ và, $\psi \in \Psi$.

Sau đây là kết quả chính của đề tài.

2.1.4 Định lí. *Cho (X, S) là không gian S-mêtric đầy đủ, $m \in \mathbb{N}$, $A_1, A_2, ..., A_m$ là dãy tập đóng khác rỗng của X và $Y = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$. Giả sử $T : Y \longrightarrow Y$ là co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu. Khi đó T có duy nhất điểm bất động $z \in \bigcap_{i=1}^{m} A_i$.*

Chứng minh. Cho $x_0 \in Y$ ta xây dựng được dãy $x_{n+1} = Tx_n, n = 0, 1, ...$ Nếu tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_{n_0+1} = x_{n_0}$ thì $Tx_{n_0} = x_{n_0+1} = x_{n_0}$. Vậy T có điểm bất động là x_{n_0}.

Giả sử $x_{n+1} \neq x_n$ với mọi $n = 0, 1, 2, ...$ Vì $Y = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ nên với mọi $n > 0$ tồn tại $i_n \in \{1, 2, ...m\}$ sao cho $x_{n-1} \in A_{i_n}$ và $x_n \in A_{i_n+1}$. Sử dụng điều kiện co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu của T và tính không âm của hàm của ψ, ta được

$$\begin{aligned}
& \mu(S(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n)) \\
= \ & \mu(S(Tx_n, Tx_n, Tx_{n-1})) \\
\leq \ & \mu(\frac{1}{3}[S(x_n, x_n, Tx_{n-1}) + S(x_{n-1}, x_{n-1}, Tx_n)]) \\
& -\psi(S(x_n, x_n, Tx_{n-1}), S(x_{n-1}, x_{n-1}, Tx_n)) \\
= \ & \mu(\frac{1}{3}[S(x_n, x_n, x_n) + S(x_{n-1}, x_{n-1}, x_{n+1})])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\psi(S(x_n,x_n,x_n),S(x_{n-1},x_{n-1},x_{n+1})) \\
= \;& \mu(\frac{1}{3}S(x_{n-1},x_{n-1},x_{n+1})) \\
& -\psi(0,S(x_{n-1},x_{n-1},x_{n+1})) \qquad (2.1)\\
< \;& \mu(\frac{1}{3}S(x_{n-1},x_{n-1},x_{n+1})).
\end{aligned}$$

Do μ là hàm không giảm nên ta có

$$\begin{aligned}
& S(x_{n+1},x_{n+1},x_n) \\
\le \;& \frac{1}{3}S(x_{n-1},x_{n-1},x_{n+1}) \\
\le \;& \frac{1}{3}[2S(x_{n+1},x_{n+1},x_n)+S(x_{n-1},x_{n-1},x_n)] \\
= \;& \frac{2}{3}S(x_{n+1},x_{n+1},x_n)+\frac{1}{3}S(x_{n-1},x_{n-1},x_n). \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Suy ra $S(x_{n+1},x_{n+1},x_n) \le S(x_{n-1},x_{n-1},x_n)$. Vậy $\{S(x_{n+1},x_{n+1},x_n)\}$ là dãy giảm, không âm nên hội tụ. Khi đó tồn tại $r \ge 0$ sao cho $\lim S(x_{n+1},x_{n+1},x_n) = r$. Cho $n \to +\infty$ trong (2.2), ta được $r \le \lim \frac{1}{3}S(x_{n-1},x_{n-1},x_{n+1}) \le \frac{2}{3}r + \frac{1}{3}r = r$. Suy ra

$$\lim S(x_{n-1},x_{n-1},x_{n+1}) = 3r.$$

Cho $n \to +\infty$ trong (2.1), sử dụng liên tục của μ ta được $\mu(r) \le \mu(r) - \psi(0,3r)$. Tiếp tục sử dụng tính không âm của ψ ta được $\psi(0,3r) = 0$ hay $r = 0$, tức là $\lim S(x_{n+1},x_{n+1},x_n) = 0$.

Tiếp theo ta chứng minh $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Trước hết ta chứng minh khẳng định sau.

Cho $\varepsilon > 0$ bất kỳ. Khi đó tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho nếu $r, q \ge n$ với $r - q \equiv 1 \,(\mathrm{mod} m)$ thì $S(x_r,x_r,x_q) < \varepsilon$.

Thật vậy, giả sử ngược lại, tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho với mỗi số tự nhiên n, tồn tại r_n, q_n thỏa mãn $r_n > q_n \ge n$ và $r_n - q_n \equiv 1 \,(\mathrm{mod} m)$ ta có $S(x_{r_n},x_{r_n},x_{q_n}) \ge \varepsilon$.

Ta chọn $n > 2m$, tương ứng với $q_n > n$, ta chọn r_n là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $r_n > q_n$, $r_n - q_n \equiv 1 \,(\mathrm{mod} m)$ và $S(x_{r_n}, x_{r_n}, x_{q_n}) \geq \varepsilon$. Khi đó $S(x_{r_n-m}, x_{r_n-m}, x_{q_n}) < \varepsilon$. Sử dụng bất đẳng thức tam giác, Mệnh đề (1.1.3) và Hệ quả (1.1.4) ta có

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq S(x_{q_n}, x_{q_n}, x_{r_n}) \\
&\leq S(x_{q_n}, x_{q_n}, x_{r_n-m}) + 2S(x_{r_n}, x_{r_n}, x_{r_n-m}) \\
&< \varepsilon + 2[S(x_{r_n}, x_{r_n}, x_{r_n-1}) + 2S(x_{r_n-1}, x_{r_n-1}, x_{r_n-m})] \\
&\leq \varepsilon + 2S(x_{r_n}, x_{r_n}, x_{r_n-1}) \\
&\quad +2^2[S(x_{r_n-1}, x_{r_n-1}, x_{r_n-2}) + 2S(x_{r_n-2}, x_{r_n-2}, x_{r_n-m})] \\
&= \varepsilon + \sum_{k=1}^{m} 2^k S(x_{r_n-k+1}, x_{r_n-k+1}, x_{r_n-k}).
\end{aligned}$$

Cho $n \to +\infty$ trong bất đẳng thức trên ta được

$$\lim S(x_{q_n}, x_{q_n}, x_{r_n}) = \varepsilon.$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq S(x_{q_n}, x_{q_n}, x_{r_n}) \\
&\leq 2S(x_{q_n}, x_{q_n}, x_{q_n+1}) + S(x_{r_n}, x_{r_n}, x_{q_n+1}) \\
&\leq 2S(x_{q_n}, x_{q_n}, x_{q_n+1}) + 2S(x_{r_n}, x_{r_n}, x_{r_n+1}) + S(x_{q_n+1}, x_{q_n+1}, x_{r_n+1}) \\
&\leq 2S(x_{q_n}, x_{q_n}, x_{q_n+1}) + 2S(x_{r_n}, x_{r_n}, x_{r_n+1}) \\
&\quad +2S(x_{q_n+1}, x_{q_n+1}, x_{q_n}) + S(x_{r_n+1}, x_{r_n+1}, x_{q_n}) \\
&\leq 2S(x_{q_n}, x_{q_n}, x_{q_n+1}) + 2S(x_{r_n}, x_{r_n}, x_{r_n+1}) + 2S(x_{q_n+1}, x_{q_n+1}, x_{q_n}) \\
&\quad +2S(x_{r_n+1}, x_{r_n+1}, x_{r_n}) + S(x_{q_n}, x_{q_n}, x_{r_n}).
\end{aligned}$$

Cho $n \to +\infty$ trong bất đẳng thức trên ta được

$$\lim S(x_{q_n+1}, x_{q_n+1}, x_{r_n+1}) = \varepsilon.$$

Sử dụng Mệnh đề (1.1.3) Hệ quả (1.1.4) ta có

$$\begin{aligned} & S(x_{q_n}, x_{q_n}, Tx_{r_n}) \\ = \ & S(x_{q_n}, x_{q_n}, x_{r_n+1}) \\ \leq \ & S(x_{q_n}, x_{q_n}, x_{r_n}) + 2S(x_{r_n+1}, x_{r_n+1}, x_{r_n}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

và

$$\begin{aligned} & S(x_{r_n}, x_{r_n}, Tx_{q_n}) \\ = \ & S(x_{r_n}, x_{r_n}, x_{q_n+1}) \\ \leq \ & 2S(x_{r_n}, x_{r_n}, x_{q_n}) + S(x_{q_n+1}, x_{q_n+1}, x_{q_n}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Cho $n \to +\infty$ trong (2.3) và (2.4), ta được

$$\lim S(x_{q_n}, x_{q_n}, Tx_{r_n}) = \varepsilon \tag{2.5}$$

và

$$\lim S(x_{r_n}, x_{r_n}, Tx_{q_n}) = \varepsilon. \tag{2.6}$$

Vì $r_n - q_n \equiv 1 \,(\mathrm{mod} m)$ nên mỗi phần tử x_{q_n}, x_{r_n} chỉ thuộc một trong hai tập A_i và A_{i+1} với $1 \leq i \leq m$. Khi đó sử dụng điều kiện co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu của T và tính chất của hàm μ ta được

$$\begin{aligned} \mu(\varepsilon) \leq \ & \mu(S(x_{q_n+1}, x_{q_n+1}, x_{r_n+1})) \\ & = \mu(S(Tx_{q_n}, Tx_{q_n}, Tx_{r_n})) \\ & \leq \mu(\frac{1}{3}[S(x_{q_n}, x_{q_n}, Tx_{r_n}) + S(x_{r_n}, x_{r_n}, Tx_{q_n})]) \\ & \quad -\psi(S(x_{q_n}, x_{q_n}, Tx_{r_n}), S(x_{r_n}, x_{r_n}, Tx_{q_n})) \\ & = \mu(\frac{1}{3}[S(x_{q_n}, x_{q_n}, x_{r_n+1}) + S(x_{r_n}, x_{r_n}, x_{q_n+1})]) \\ & \quad -\psi(S(x_{q_n}, x_{q_n}, x_{r_n+1}), S(x_{r_n}, x_{r_n}, x_{q_n+1})). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Cho $n \to +\infty$ trong (2.7) sử dụng (2.5), (2.6), tính liên tục của hàm μ và nửa liên tục dưới của ψ, ta được $\mu(\varepsilon) \leq \mu(\frac{1}{3}(\varepsilon+\varepsilon)) - \psi(\varepsilon, \varepsilon)$. Do ψ là hàm không âm nên $\mu(\varepsilon) \leq \mu(\frac{1}{3}(\varepsilon+\varepsilon))$. Vì μ là hàm không giảm nên $\varepsilon \leq \frac{2}{3}\varepsilon$. Điều này mâu thuẫn với $\varepsilon > 0$. Vậy khẳng định đã được chứng minh.

Áp dụng khẳng định trên, tiếp tục chứng minh định lí. Ta sẽ chứng minh $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong tập Y. Với mọi $\varepsilon > 0$, theo khẳng định trên sẽ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $r, q \geq n_0$, với $r - q \equiv 1 \,(\mathrm{mod} m)$ thì

$$S(x_r, x_r, x_q) \leq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.8}$$

Do $\lim S(x_n, x_n, x_{n+1}) = 0$, nên tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_1$, ta có

$$S(x_n, x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\varepsilon}{4m}. \tag{2.9}$$

Chọn $r, s \geq \max\{n_0, n_1\}$ và $s \geq r$. Khi đó tồn tại $k \in \{1, 2, ..., m\}$ sao cho $s - r \equiv k \,(\mathrm{mod} m)$, $s - r + t \equiv 1 \,(\mathrm{mod} m)$ suy ra $t = m - k + 1$, ta có

$$\begin{aligned}
& S(x_r, x_r, x_s) \\
\leq\; & 2S(x_r, x_r, x_{s+t}) + S(x_{s+t}, x_{s+t}, x_s) \\
\leq\; & 2S(x_r, x_r, x_{s+t}) + 2S(x_{s+t}, x_{s+t}, x_{s+t-1}) + S(x_{s+t-1}, x_{s+t-1}, x_s) \\
\leq\; & 2S(x_r, x_r, x_{s+t}) + 2S(x_{s+t}, x_{s+t}, x_{s+t-1}) + ... \\
& +2S(x_{s+2}, x_{s+2}, x_{s+1}) + S(x_{s+1}, x_{s+1}, x_s).
\end{aligned}$$

Sử dụng (2.8), (2.9) ta được $S(x_r, x_r, x_s) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2t\frac{\varepsilon}{4m} \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2m\frac{\varepsilon}{4m} = \varepsilon$.

Vậy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong Y. Vì Y là tập đóng trong X đầy đủ nên Y đầy theo Mệnh đề 1.2.5. Do đó tồn tại $x \in Y$ sao cho $\lim x_n = x$. Ta chứng minh x là điểm bất động của T. Ta có $Y = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ là sự biểu diễn tuần hoàn của Y đối với T còn dãy $\{x_n\}$ có vô số phần tử thuộc A_i với mọi $i = \{1, 2, ..., m\}$. Giả sử

$x \in A_i$, $Tx \in A_{i+1}$, xét dãy con x_{n_k} của x_n với $x_{n_k} \in A_i$, sử dụng điều kiện co, ta được

$$\begin{aligned}
& \mu(S(x_{n_k+1}, x_{n_k+1}, Tx)) \\
= \; & \mu(S(Tx_{n_k}, Tx_{n_k}, Tx)) \\
\leq \; & \mu(\frac{1}{3}[S(x_{n_k}, x_{n_k}, Tx) + S(x, x, Tx_{n_k})]) \\
& -\psi(S(x_{n_k}, x_{n_k}, Tx), S(x, x, Tx_{n_k})) \\
= \; & \mu(\frac{1}{3}[S(x_{n_k}, x_{n_k}, Tx) + S(x, x, x_{n_k+1})]) \\
& -\psi(S(x_{n_k}, x_{n_k}, Tx), S(x, x, x_{n_k+1})).
\end{aligned}$$

Cho $n \to +\infty$ trong bất đẳng thức trên và sử dụng tính liên tục của μ và nửa liên tục dưới của ψ, ta được

$$\begin{aligned}
& \mu(S(x, x, Tx)) \\
\leq \; & \mu(\frac{1}{3}S(x, x, Tx)) - \psi(S(x, x, Tx), 0)) \\
\leq \; & \mu(S(x, x, Tx)) - \psi(S(x, x, Tx), 0)).
\end{aligned}$$

Do hàm ψ không âm nên $\psi(S(x, x, Tx), 0)) \leq 0$. Suy ra $\psi(S(x, x, Tx), 0)) = 0$ hay $S(x, x, Tx) = 0$ hay $Tx = x$. Vậy x là điểm bất động của T. Cuối cùng ta chứng minh tính duy nhất của điểm bất động. Giả sử x và y là hai điểm bất động của T và $x \neq y$, ta xét

$$\begin{aligned}
& \mu(S(x, x, y)) \\
= \; & \mu(S(Tx, Tx, Ty)) \\
\leq \; & \mu(\frac{1}{3}[S(x, x, Ty) + S(y, y, Tx)]) \\
& -\psi(S(S(x, x, Ty), S(y, y, Tx))) \\
= \; & \mu(\frac{1}{3}[S(x, x, y) + S(y, y, x)])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\quad -\psi(S(x,x,y), S(y,y,x)) \\
&= \mu(\frac{2}{3}S(x,x,y)) \\
&\quad -\psi(S(x,x,y), S(y,y,x)) \\
&\leq \mu(\frac{2}{3}S(x,x,y)).
\end{aligned}$$

Suy ra $S(x,x,y) \leq \dfrac{2}{3}S(x,x,y)$. Mâu thuẫn với điều kiện $x \neq y$.

Vậy $x = y$. Định lí được chứng minh. $\square$

Sau đây là một số hệ quả được suy ra từ Định lí 2.1.4. Nếu μ là ánh xạ đồng nhất chúng ta có kết quả sau.

2.1.5 Hệ quả. *Cho (X,S) là không gian S-mêtric đầy đủ, $m \in \mathbb{N}$, $A_1, A_2, ..., A_m$ là dãy tập con đóng khác rỗng của X và $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$. Giả sử $T : Y \longrightarrow Y$ là ánh xạ thỏa mãn*

(i) $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$ là sự biểu diễn tuần hoàn của Y đối với T;

(ii) $S(Tx,Tx,Ty)) \leq \dfrac{1}{3}[S(x,x,Ty) + S(y,y,Tx)] - \psi(S(x,x,Ty), S(y,y,Tx))$

với mọi $x \in A_i, y \in A_{i+1}, i = 1,2,...,m$, và $A_{m+1} = A_1, \mu \in \Phi, \psi \in \Psi$.

Khi đó T có điểm bất động $z \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} A_i$.

Kết quả sau được suy ra từ Hệ quả 2.1.5 khi thay $\psi(a,b) = (\dfrac{1}{3} - k)(a+b)$ với $k \in [0, \dfrac{1}{3})$.

2.1.6 Hệ quả. *Cho (X,S) là không gian S-mêtric đầy đủ, $m \in \mathbb{N}$, $A_1, A_2, ..., A_m$ là dãy tập con đóng khác rỗng của X và $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$. Giả sử $T : Y \longrightarrow Y$ là ánh xạ thỏa mãn các điều kiện*

(i) $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$ là sự biểu diễn tuần hoàn của Y đối với T;

(ii) Tồn tại $k \in [0, \dfrac{1}{3})$ sao cho $S(Tx,Tx,Ty) \leq k[S(x,x,Ty) + S(y,y,Tx)]$

với mọi $x \in A_i, y \in A_{i+1}, i = 1, 2, ..., m,$ *và* $A_{m+1} = A_1$.
Khi đó T *có điểm bất động* $z \in \bigcap_{i=1}^{m} A_i$.

2.2 Ứng dụng

Những hệ quả sau là các kết quả cho ánh xạ co kiểu tích phân, ta kí hiệu Λ là tập hợp các hàm số μ: $[0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ thỏa mãn

$(h1)$ μ là hàm khả tích trên $[0, x]$ với mọi $x > 0$;

$(h2)$ Với mọi $\varepsilon > 0$, ta có $\int_0^{\varepsilon} \mu(t)dt > 0$.

2.2.1 Hệ quả. *Cho* (X, S) *là không gian* S*-mêtric đầy đủ,* $m \in \mathbb{N}$, $A_1, A_2, ..., A_m$ *là dãy tập con đóng khác rỗng của* X *và* $Y = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$. *Giả sử* $T : Y \longrightarrow Y$ *là ánh xạ thỏa mãn các điều kiện*

(i) $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ *là sự biểu diễn tuần hoàn của* Y *đối với* T*;*

(ii) Tồn tại $k \in [0, \frac{1}{3})$ *sao cho*

$$\int_0^{S(Tx,Tx,Ty)} \alpha(s)ds \leq k \int_0^{S(x,x,Ty)+S(y,y,Tx)} \alpha(s)ds$$

với mọi $x \in A_i, y \in A_{i+1}, i = 1, 2, ..., m,$ $A_{m+1} = A_1$ *và* $\alpha \in \Lambda$. *Khi đó* T *có điểm bất động* $z \in \bigcap_{i=1}^{m} A_i$.

2.2.2 Hệ quả. *Cho* (X, S) *là không gian* S*-mêtric đầy đủ. Giả sử* $T : X \longrightarrow X$ *là ánh xạ thỏa mãn điều kiện*

$$\int_0^{S(Tx,Tx,Ty)} \alpha(s)ds \leq k \int_0^{S(x,x,Ty)+S(y,y,Tx)} \alpha(s)ds$$

với mọi $x, y \in X$, $k \in [0, \frac{1}{3})$ *và* $\alpha \in \Lambda$. *Khi đó* T *có điểm bất động* $z \in X$.

2.2.3 Ví dụ. Cho $X = \mathbb{R}$ và S-mêtric được xây dựng như trong Ví dụ 1.1.2. Giả sử $A_1 = [0, 1], A_2 = [0, \frac{1}{3}]$, $Y = A_1 \bigcup A_2$ và $T : Y \longrightarrow Y$ sao cho $Tx = \dfrac{x}{10}$ với $x \in Y$. Xét $\mu : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ sao cho $\mu(t) = t$ và $\psi : [0, +\infty)^2 \longrightarrow$

$[0,+\infty)$ thỏa mãn $\psi(x,y) = \dfrac{1}{21}(x+y)$. Ta có $A_1 \bigcup A_2$ là sự biểu diễn tuần hoàn của Y đối với T, $\mu \in \Phi$ và $\psi \in \Psi$. Ta chứng minh T thỏa mãn điều kiện co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu, nghĩa là với $x, y \in Y$ ta có
$\mu(S(Tx,Tx,Ty)) \leq \mu(\dfrac{1}{3}[S(x,x,Ty)+S(y,y,Tx)]) - \psi(S(x,x,Ty), S(y,y,Tx))$.

Thật vậy ta có

$$\mu(S(Tx,Tx,Ty)) = \mu(2|\frac{x}{10} - \frac{y}{10}|) = \frac{1}{5}|x-y|. \tag{2.10}$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}
& \mu(\frac{1}{3}[S(x,x,Ty)+S(y,y,Tx)]) - \psi(S(x,x,Ty),S(y,y,Tx)) \\
= \ & \mu(\frac{1}{3}[2|x-\frac{y}{10}|+2|y-\frac{x}{10}|]) - \psi(2|x-\frac{y}{10}|, 2|y-\frac{x}{10}|) \\
= \ & \frac{2}{3}(|x-\frac{y}{10}|+|y-\frac{x}{10}|) - \frac{2}{21}(|x-\frac{y}{10}|+|y-\frac{x}{10}|) \\
= \ & \frac{4}{7}(|x-\frac{y}{10}|+|y-\frac{x}{10}|).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Với $x \geq y$, từ (2.10) ta có

$$\mu(S(Tx,Tx,Ty)) = \frac{1}{5}(x-y).$$

Xét $y \leq \dfrac{x}{10}$ từ (2.11) ta có

$$\begin{aligned}
& \mu(\frac{1}{3}[S(x,x,Ty)+S(y,y,Tx)]) - \psi(S(x,x,Ty),S(y,y,Tx)) \\
= \ & \frac{4}{7}(x-\frac{y}{10}+\frac{x}{10}-y) \\
= \ & \frac{22}{35}(x-y) \\
\geq \ & \frac{1}{5}(x-y) \\
= \ & \mu(S(Tx,Tx,Ty)).
\end{aligned}$$

Xét $y > \dfrac{x}{10}$ từ (2.11) ta có

$$\begin{aligned}
& \mu(\frac{1}{3}[S(x,x,Ty)+S(y,y,Tx)]) - \psi(S(x,x,Ty),S(y,y,Tx)) \\
= \; & \frac{4}{7}(x - \frac{y}{10} + y - \frac{x}{10}) \\
= \; & \frac{18}{35}(x+y) \geq \frac{1}{5}(x-y) \\
= \; & \mu(S(Tx,Tx,Ty)).
\end{aligned}$$

Với $y > x$, từ (2.10) ta có

$$\mu(S(Tx,Tx,Ty)) = \frac{1}{5}(y-x).$$

Xét $x \geq \dfrac{y}{10}$ từ (2.11) ta có

$$\begin{aligned}
& \mu(\frac{1}{3}[S(x,x,Ty)+S(y,y,Tx)]) - \psi(S(x,x,Ty),S(y,y,Tx)) \\
= \; & \frac{4}{7}(x - \frac{y}{10} + y - \frac{x}{10}) \\
= \; & \frac{18}{35}(y+x) \\
\geq \; & \frac{1}{5}(y+x) \\
\geq \; & \frac{1}{5}(y-x) \\
= \; & \mu(S(Tx,Tx,Ty)).
\end{aligned}$$

Xét $x \leq \dfrac{y}{10}$ từ (2.11) ta có

$$\begin{aligned}
& \mu(\frac{1}{3}[S(x,x,Ty)+S(y,y,Tx)]) - \psi(S(x,x,Ty),S(y,y,Tx)) \\
= \; & \frac{4}{7}(\frac{y}{10} - x + y - \frac{x}{10}) \\
= \; & \frac{22}{35}(y-x) \\
\geq \; & \frac{1}{5}(y-x) \\
= \; & \mu(S(Tx,Tx,Ty)).
\end{aligned}$$

Do đó tất cả các điều kiện của Định lí 2.1.4 được thỏa, nên T có một điểm bất động và $z = 0 \in A_1 \bigcap A_2$ là điểm bất động của T.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1 Kết luận

Đề tài đạt được kết quả sau

- Đề tài đã xây dựng được định nghĩa *co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu* trong không gian S-mêtric (Định nghĩa 2.1.3).

- Thiết lập và chứng minh định lí điểm bất động cho điều kiện co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu trong không gian S-mêtric (Định lí 2.1.4).

- Xây dựng ví dụ minh họa cho Định lí 2.1.4 (Ví dụ 2.2.3).

- Một số hệ quả quan trọng cũng được rút ra từ Định lí 2.1.4.

Các kết quả trên đã được công bố trong Kỷ yếu Hội nghị sinh viên nghiên cứu khoa học năm 2013, Trường Đại học Đồng Tháp [6] và một bản thảo bài báo khoa học đang gửi đăng [16].

2 Kiến nghị

Trong thời gian tới đề tài có thể phát triển theo các hướng sau

-Thiết lập định lí điểm bất động cho điều kiện co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu trong một số mêtric suy rộng khác.

-Đề tài có thể được tiếp tục phát triển để tìm một số áp dụng khác cho định lí điểm bất động cho điều kiện co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu trong không gian S-mêtric.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Y. Alber and S. G. Delabriere (1997), *Principles of weakly contractive maps in Hilbert spaces*, New results in Operator Theory, Advances Appl., Vol.8, 7-22.

[2] S. Banach (1992), *Surles operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales*, Fund Math., 3, 133-181.

[3] D. Boyd and T. Wong (1969), *On nonlinear contractions*, Proc. Amer. Math. Soc., 20, 458-464.

[4] S. Chandok and M. Postolache (2013), *Fixed point theorem for weakly Chatterjea-type cyclic contractions*, Fixed Point Theorem Appl., 2013:28, 9 pages.

[5] S. K. Chatterjea (1972), *Fixed point theorem*, C. R. Acad. Bulgare Sci., 25, 727-730.

[6] N. Q. Dũng và N. T. T. Lý (2013), *Định lí điểm bất động co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu trong không gian S-mêtric*, Kỷ yếu Hội nghị sinh viên nghiên cứu khoa học năm 2013, Lĩnh vực khoa học tự nhiên, Trường Đại học Đồng Tháp, 67-74.

[7] N. V. Dung and N. T. Hieu (2012), *One fixed point theorem for g-monotone maps on partially ordered S-metric spaces*, preprint.

[8] N. V. Dung and N. T. T. Ly (2012), *A common fixed point theorem for weakly tangential maps on S-metric spaces*, preprint.

[9] N. T. Hieu, N. T. T. Ly and N. V. Dung (2012), *A generalization of Ciric quasi-contractions for maps on S-metric spaces*, T. J. Math., inpress.

[10] R. Kannan (1968), *Some results on fixed points*, Bull. Calcutta Math. Soc., 60, 71-76.

[11] R. Kannan (1969), *Some results on fixed points-II*, Amer. Math. Monthly, 76, 405-408.

[12] M. A. Khamsi (2010), *Remarks on cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, fixed point Theory Appl. 2010, 7 pages

[13] W. A. Kirk, P. S. Srinivasan and P. Veeramani (2003), *Fixed points for mappings satisfying cyclical contractive conditions*, Fixed Point Theory, 4(1), 79-89.

[14] A. J. Kurdila and M. Zabarankin (2005), *Convex Functional Analysis*, Birkhauser Verlag.

[15] N. V. Luong and N. X. Thuan (2011), *Fixed point theorem for generalized weak contractions satisfying rational expressions in ordered metric spaces*, Fixed Point Theory Appl., 2011:46, 10 pages.

[16] N. T. T. Lý và N. Q. Dũng (2014), *Định lí điểm bất động co tuần hoàn kiểu Chatterjea yếu trong không gian S-mêtric*, bản thảo.

[17] S. Reich (1975), *Some fixed point problems*, Atti Acad. Naz. Lincei Ren. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 57, 194-198.

[18] B. E. Rhoades (2001), *Some theorems on weakly contractive maps*, Nonlinear Anal., 47, 2683-2693.

[19] S. Sedghi, N. V. Dung and V. T. L. Hang, *Remarks on metric-type spaces and applications*, preprint.

[20] S. Sedghi, N. Shobe and A. Aliouche (2012), *A generalization of fixed point theorem in S-metric spaces*, Mat. Vesnik, 64(3), 258 - 266.

[21] X. Zhou and W. Wu and H. Ma (2012), *A contraction fixed point theorem in partially ordered metric spaces and application to fractional differential equations*, Abstr. Appl. Anal., 2012, 11 pages.